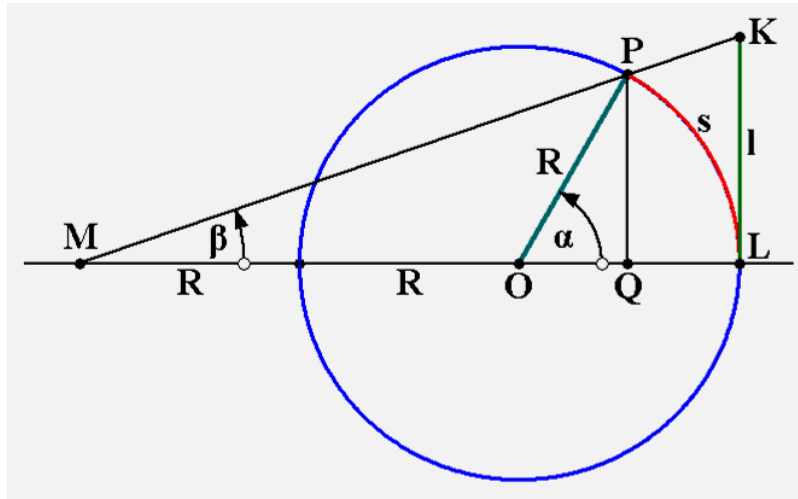


A Snellius - féle módszerről

A Snellius - módszer egy körív hosszának közelítő megszerkesztését adja; vagyis egy olyan egyenes szakasz megszerkesztését, melynek hossza jó közelítéssel egyezik az adott körív hosszával. A szerkesztés [1] szerint az alábbi módon alakul – 1. ábra.



1. ábra

Rajzoljunk egy O középpontú, R sugarú kört, melynek egyik pontja L !

Az LO szakaszt hosszabbítsuk meg O - n túl, majd mérjük fel rá az R sugár kétszeresét!

A kapott M pontot kössük össze a kör α középponti szögéhez tartozó P ponttal!

Húzzuk meg a kör L pontbeli érintőjét!

Hosszabbítsuk meg az MP egyenest, hogy metssze az L pontbeli érintőt!

A kapott K metszéspont és az L pont $l = KL$ távolsága lesz a keresett közelítő ívhossz, azaz $l \approx s$, ahol s az R sugarú kör α középponti szögéhez tartozó pontos ívhossz.

Az [1] műben azt olvastuk, hogy ha $\alpha < 30^\circ$, akkor PL és KL hosszának eltérése nem nagyobb $0,0002 \cdot R$ - nél. Most ennek járunk utána. A számítást alább részletezzük.

A PL ív hossza:

$$\underline{s(\alpha) = R \cdot \alpha}, \quad (1)$$

ahol az α szöget ívmértékben / radiánban mérjük.

A KL szakasz hosszát így nyerjük:

$$l = 3 \cdot R \cdot \operatorname{tg} \beta; \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MQ}} = \frac{R \cdot \sin \alpha}{2 \cdot R + R \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}; \quad (3)$$

most (2) és (3) - mal:

$$l(\alpha) = 3 \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha} . \quad (4)$$

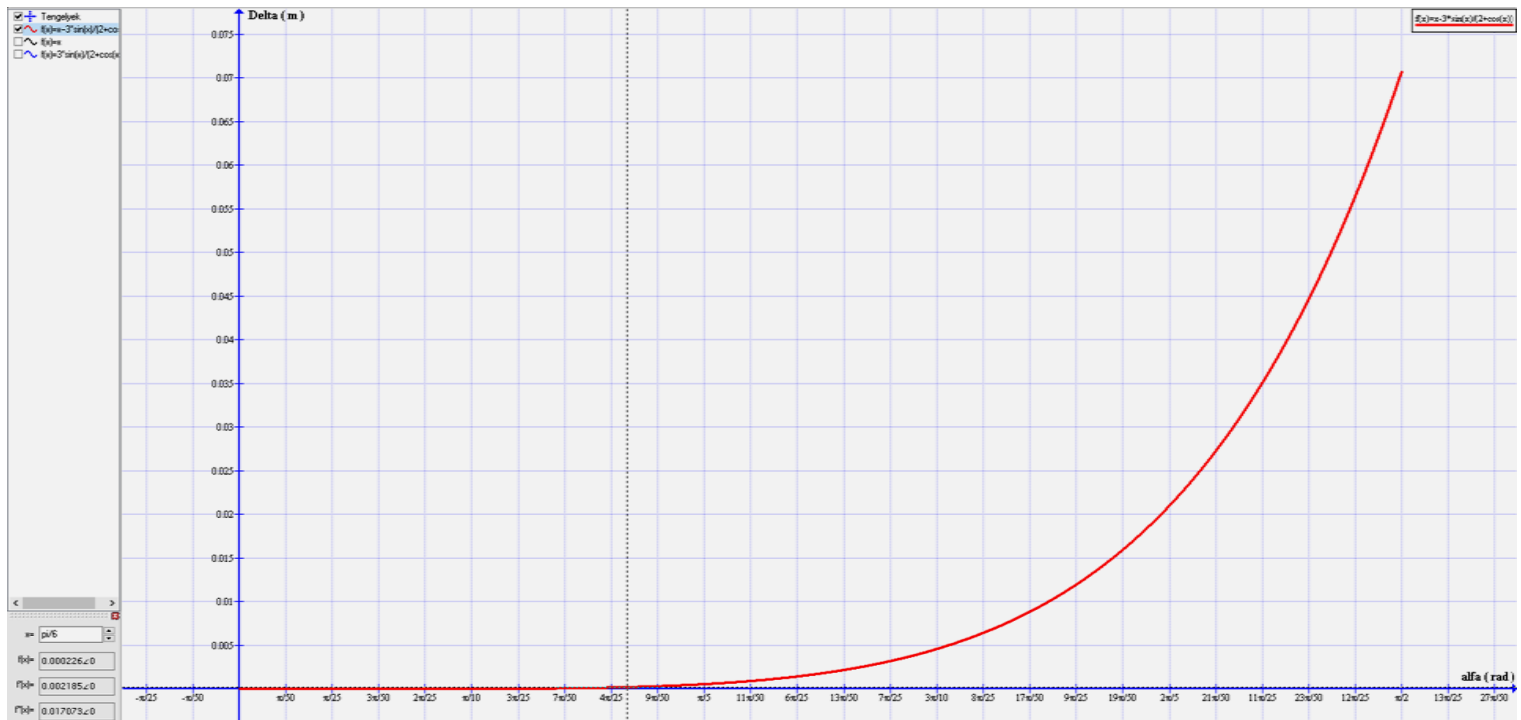
Majd s és l eltérése:

$$\Delta = s - l . \quad (5)$$

Ezután (1), (4) és (5) - tel:

$$\Delta(\alpha) = R \cdot \left(\alpha - 3 \cdot \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha} \right) . \quad (6)$$

A (6) függvény grafikonját a 2. ábra mutatja a $0 \sim \pi/2$ (rad) szögtartományban, $R = 1$ (m) - re.



2. ábra

A 2. ábra bal alsó sarkában látható értékekkel:

$$\Delta\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,000226 , \quad (a)$$

vagyis az $R = 1$ (m) sugárnak mintegy két tízezred része. A $0 \sim \pi/6$ tartományban még ennél is kisebb, ahogyan ez a 2. ábra grafikonja lefutásának jellegéből is kiolvasható.

Ezek szerint az [1] - beli állítás igaz, vagyis igen jó a Snellius - szerkesztés közelítése.

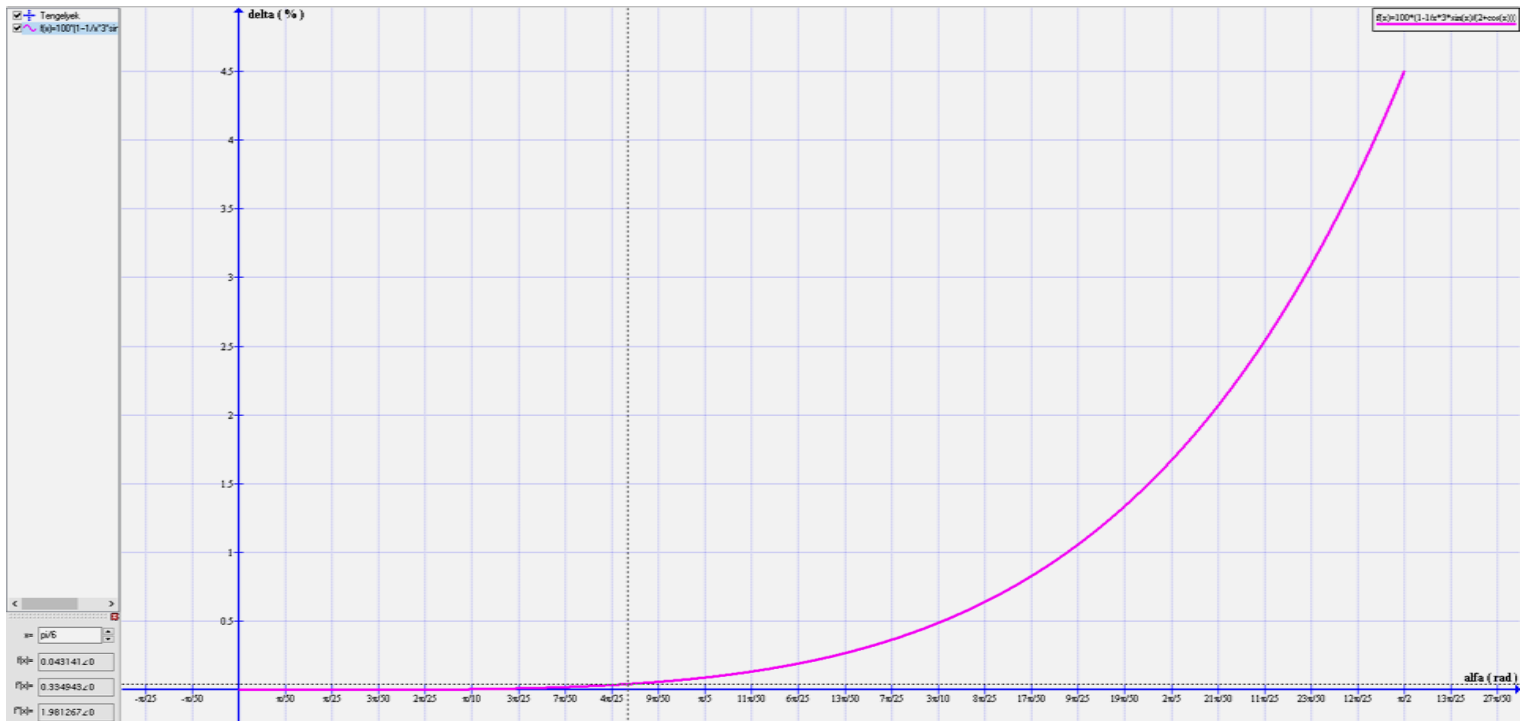
Ezt úgy is lefordíthatjuk, hogy egy $R = 1000 \text{ mm}$ sugarú kör és $0^\circ < \alpha < 30^\circ$ esetében jó közelítéssel: $\Delta < 0,2 \text{ mm}$.

Máshogyan is kifejezhetjük a pontos és a közelítő ívhosszak eltérését: a δ százalékos mutatóval. Eszerint:

$$\delta = \frac{s-l}{s} \cdot 100 = \left(1 - \frac{l}{s}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{3 \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{2+\cos \alpha}}{R \cdot \alpha}\right) \cdot 100 \% \rightarrow$$

$$\delta = \left(1 - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{3 \cdot \sin \alpha}{2+\cos \alpha}\right) \cdot 100 (\%) . \quad (8)$$

A (8) függvény képe a $0 \sim \pi/2$ tartományban a 3. ábrán látható.



3. ábra

Erről leolvasható, hogy:

$$\delta\left(\alpha = \frac{\pi}{6}\right) = 0,043141 \% \approx 0,04 \% , \quad (b)$$

ami igen kicsi viszonylagos eltérést jelent.

Meglepő, de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ esetén még mindig csak **4,5 %** a relatív hiba, ahogyan az a 3. ábráról leolvasható. Ez is mutatja e módszer hatékonyságát.

Megjegyzések:

M1. [1] - ben azt is olvashatjuk, hogy ha $\alpha > 30^\circ$, akkor α - t 30° - nál kisebb részekre osztjuk, elvégezzük ezekre a szerkesztést, majd a kapott eredményeket lemérjük és össze - adjuk. Ez nem igényel bővebb magyarázatot.

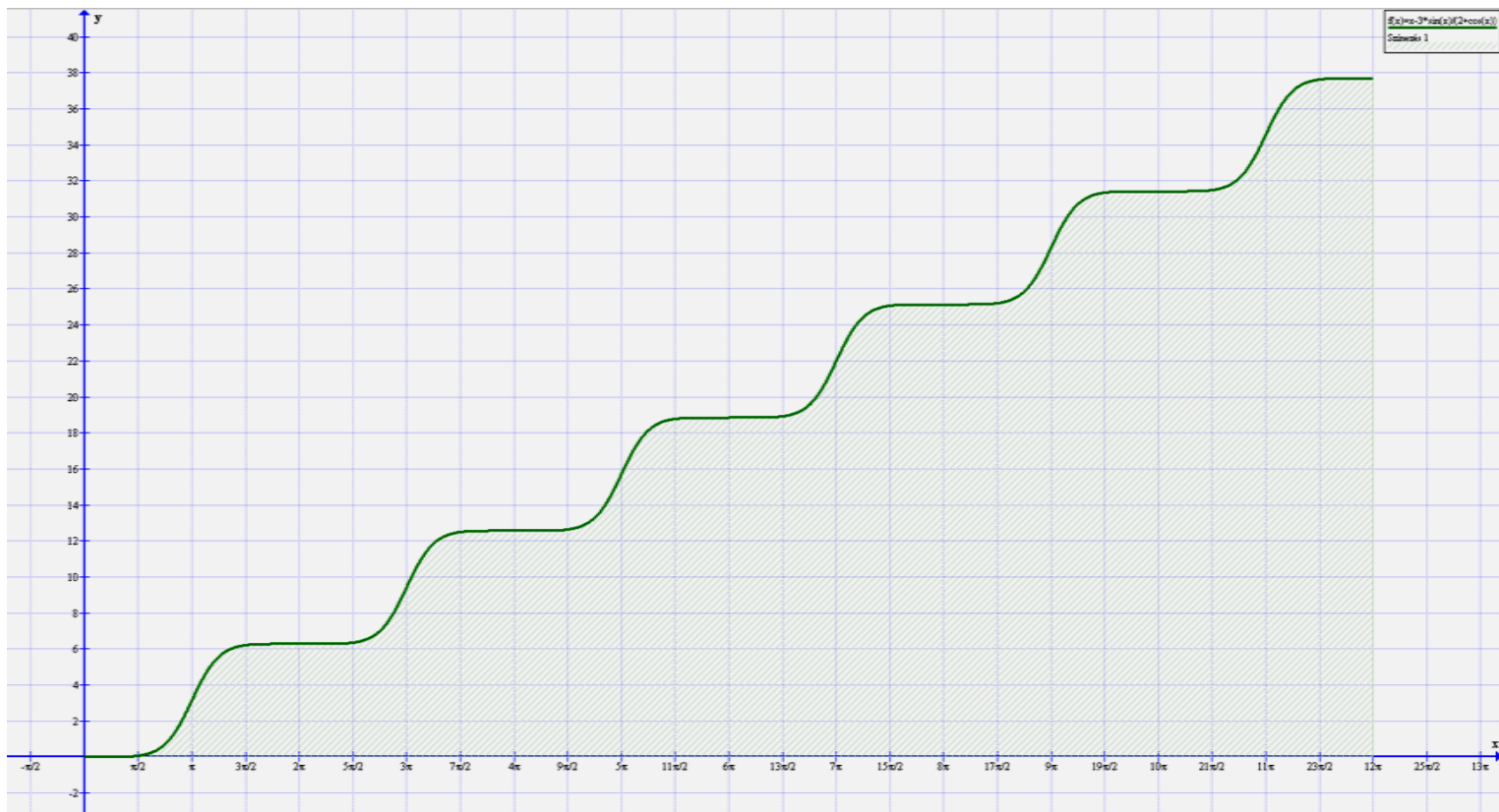
M2. Nem igazán gondoljuk, hogy valaha is szükségünk lenne a fenti szerkesztésre.

Ugyanis minden ívhossz - meghatározási feladatunkat számítással végezzük. Lehet, hogy ez közelítő lesz, de leginkább csak numerikus okok miatt.

(Gondoljunk itt például az ellipszis ívhosszának meghatározására!)

Úgy látjuk, hogy a fenti szerkesztésnek – és a rokon szerkesztéseknek is – ma már főként csak elvi és tudománytörténeti jelentősége van.

M3. Közben találkoztunk a (6) érdekes függvénnyel is, melynek egy másik grafikonját a 4. ábra mutatja.



4. ábra

Ez a függvényalak akár hasznosítható is lehet valahol. Első ránézésre a teraszos földmű - velés jutott róla eszünkbe. Majd pedig egy hegyi szerpentin fél metszete. (Hegyibe!)

Forrás:

[1] – *Hajdu Endre ~ H. Temesvári Ágota*: Konstruktív geometria
Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó, Budapest, 1995.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2021. 10. 19.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>